УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Леонтьева Н.В., кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко», г. Глазов
leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Ворожцова В.М., преподаватель кафедры математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко», г. Глазов
vorozhtsova.vera@gmail.com

Аннотация. В статье рассматриваются особенности подготовки школьников к олимпиадам по линии уравнений с использованием классических неравенств. Применение последних расширяет совокупность методов, которые можно использовать для решения уравнений, способствует развитию логического мышления и математической культуры учащихся.

Ключевые слова. Олимпиадные задачи, классические неравенства, обучение решению задач.

CLASSIC INEQUALITY USING DURING LEARNERS TRAINING FOR MATHEMATICAL COMPETITION

N.V. Leonteva, candidat of pedagogical science, assistant of chair of mathematic and informatics,
Glazov State Pedagogical Institut by V.G. Korolenko, Glazov
leonteva-natalia-0812@yandex.ru

V.M. Vorozhtsova, assistant of chair of mathematic and informatics,
Glazov State Pedagogical Institut by V.G. Korolenko, Glazov
vorozhtsova.vera@gmail.com

Abstract. In the article the learners training particularity to mathematical competition on the line of equation with using classical inequality are considered. Their application expand the method variety for equation solving, contribute learners logical mind and mathematical culture development.

Keywords: competitive task, classical inequality, task solution learning.

Математическая подготовка школьников может осуществляться в различных направлениях. Одним из них является участие учеников в олимпиадах самого различного уровня. Организация занятий для подготовки к олимпиадам накладывает особые требования как к содержанию изучаемого материала, так и методике их проведения. В данной статье авторы свое внимание фиксируют на вопросе отбора заданий для таких занятий.

Тематика олимпиадных задач достаточно обширна и включает в себя самые различные классы задач – от логических до геометрических. Среди них можно выделить линию уравнений. Данная линия является одной из центральных в курсе математики, поскольку к уравнениям сводятся многие другие типы задач. При решении олимпиадных заданий достаточно часто используются не только стандартные методы решения, такие как метод замены переменных, метод элементарных преобразований и другие, но и нестандартные методы. К их числу можно отнести метод, основанный на применении классических неравенств. Выделим отдельные, с помощью которых можно найти корни уравнений некоторых классов.

В качестве первого рассмотрим неравенство Коши $A \geq G$, где A – среднее арифметическое, G – среднее геометрическое неотрицательных величин [1, с. 5]. В общем случае возможен переход как к среднему арифметическому, так и к среднему геометрическому. Рассмотрим случай перехода от среднего геометрического к среднему арифметическому.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x - x^2} + \sqrt{3x^2 + 2x - 1} + \sqrt{5x^2 - 4x} = 5x - 1$.

Найдем область определения уравнения, которая может быть описана с помощью следующей системы неравенств: $\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0, \\ 3x^2 + 2x - 1 \geq 0, \\ 5x^2 - 4x \geq 0, \\ 5x - 1 \geq 0. \end{cases}$ Множеством решений данной системы является промежуток $x \in \left[\frac{4}{5}; 2\right]$. Разложим выражения под знаком каждого корня на множители. Можно показать, что на области определения уравнения все сомножители будут только неотрицательными. Тогда к каждому из корней можно применить оценку посредством неравенства Коши. В результате левая часть исходного уравнения может быть оценена так:

$$\sqrt{(2 - x)x} + \sqrt{(3x - 1)(x + 1)} + \sqrt{(5x - 4)x} \leq \frac{2-x+x}{2} + \frac{3x-1+x+x}{2} + \frac{5x-4+x}{2} = 5x - 1.$$

Правая часть неравенства после преобразований совпадает с правой частью рассматриваемого уравнения. Таким образом, на области определения его левая часть не больше правой части. Равенство возможно только при выполнении следующих условий $\begin{cases} x = 2 - x, \\ x - 1 = x + 1, \\ 5x - 4 = x. \end{cases}$ Записанная система имеет единственное решение $x = 1$. Найденное значение принадлежит области определения исходного уравнения, а следовательно, является его решением.

Классическим методом решения иррациональных уравнений является возведение их левой и правой частей в степень. Если обсуждаемое уравнение решать таким методом, то после всех преобразований мы получим уравнение восьмой степени. Подбором можно установить, что $x = 1$ является корнем этого уравнения кратности 2. Далее требуется найти корни многочлена шестой степени или доказать, что их нет, причем рациональных корней он не имеет. Таким образом, решение данного уравнения путем последовательного возведения в степень позволяет найти его корень. Однако без использования других методов весьма затруднительно доказать тот факт, что других корней данное уравнение не имеет. Таким образом, применение неравенства Коши позволяет обнаружить решение быстрее и проще.

Другим неравенством, дающим возможность эффективно решать некоторые виды уравнений, является неравенство Бернулли. Фактически упоминаемое неравенство представляют два неравенства, определяемых значением входящего в него параметра. Они таковы:

$$(1 + x)^p \geq 1 + px, x > -1, p \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty),$$
$$(1 + x)^p \leq 1 + px, x > -1, p \in (0; 1).$$

Равенство в приведенных неравенствах Бернулли выполняется только для $x = 0$ [1, с. 24].

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{1 + x} = \left(1 + \frac{x}{16}\right)^4$. При решении классическим способом путем возведения в четвертую степень получаем уравнение шестнадцатой степени, корни которого найти не просто. Перепишем уравнение в следующем виде $\sqrt[4]{1 + x} - \left(1 + \frac{x}{16}\right)^4 = 0$. Область определения уравнения представляет собой неравенство $x \geq -1$. Применим к выражению $\sqrt[4]{1 + x}$ неравенство Бернулли, в результате получаем оценку

$$(1 + x)^{\frac{1}{4}} \leq 1 + \frac{x}{4}, \tag{1}$$

которая выполняется на всей области определения. Выражение $\left(1 + \frac{x}{16}\right)^4$ с помощью неравенства Бернулли можно оценить следующим образом

$$\left(1 + \frac{x}{16}\right)^4 \geq 1 + \frac{x}{4}. \tag{2}$$

Оценка справедлива при условии $x \geq -16$. Соответственно на области определения исходного уравнения выполняются оценки (1) и (2). Умножим неравенство (2) на –1, тогда справедливо неравенство $\sqrt[4]{1+x} - \left(1+\frac{x}{16}\right)^4 \leq 1 + \frac{x}{4} - 1 - \frac{x}{4}$, что позволяет найти оценку левой части уравнения. Она такова $\sqrt[4]{1+x} - \left(1+\frac{x}{16}\right)^4 \leq 0$. Полученное неравенство выполняется для любых значений x из области определения исходного уравнения. Равенство возможно только при выполнении следующих условий $\begin{cases} x = 0, \\ \frac{x}{16} = 0. \end{cases}$ Уравнение имеет решение $x = 0$.

Еще одним классическим неравенством, позволяющим достаточно эффективно решать уравнения отдельных видов, является неравенство Иенсена для выпуклых функций. Можно показать, что для выпуклой на промежутке функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – положительные числа, удовлетворяющие условию $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежат данному промежутку [1, с. 34]. Для вогнутой функции неравенство Иенсена принимает вид

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Рассмотрим следующую задачу, демонстрирующую применение неравенства Иенсена.

Пример 3. Решите уравнение $6 \ln \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{1+x} + 4\sqrt[4]{3+x}}{6} = \ln(3+x) + \ln\sqrt{2(x+x^2)}$.

Область определения уравнения можно описать следующей системой неравенств $\begin{cases} 2x \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ 3+x \geq 0, \\ x+x^2 > 0, \\ 3+x > 0. \end{cases}$

Ее решениями являются все $x > 0$. Приведем исходное уравнение к следующему виду:

$$\ln\left(\frac{1}{6}\sqrt{2x} + \frac{1}{6}\sqrt{1+x} + \frac{4}{6}\sqrt[4]{3+x}\right) = \frac{4}{6}\ln\sqrt[4]{3+x} + \frac{1}{6}\ln\sqrt{2x} + \frac{1}{6}\ln\sqrt{1+x}.$$

Функция $y = \ln x$ является вогнутой на интервале $(0; +\infty)$. Обозначим коэффициенты уравнения так: $\lambda_1 = \frac{1}{6}, \lambda_2 = \frac{1}{6}, \lambda_3 = \frac{4}{6}$. Очевидно, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Применим неравенство Иенсена к левой части уравнения, справедлива оценка

$$\ln\left(\frac{1}{6}\sqrt{2x} + \frac{1}{6}\sqrt{1+x} + \frac{4}{6}\sqrt[4]{3+x}\right) \geq \frac{4}{6}\ln\sqrt[4]{3+x} + \frac{1}{6}\ln\sqrt{2x} + \frac{1}{6}\ln\sqrt{1+x}.$$

Равенство достигается лишь при выполнении условия $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} = \sqrt[4]{3+x}$. Отсюда находим единственный корень уравнения $x = 1$.

Применение неравенств к решению уравнений позволяет рассматривать те случаи, когда нахождение корней уравнения стандартными методами приводит к громоздким выкладкам. Таким образом, применение различных классических неравенств к решению уравнений позволяет в ряде случаев более просто прийти к их решению, способствует развитию математического и логического мышления, а также расширяет представления о методах решения уравнений.

Литература

1. Калинин С.И. Метод неравенств решения уравнений. Учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. / С. И. Калинин. – М.: Изд–во «Московский лицей», 2013. – 112 с.